中国科学: 数学 2018 年 第 48 卷 第 11 期: 1507～1526
SCIENTIA SINICA Mathematica
自然科学基金项目进展专栏 综 述
《中国科学》杂志社 SCIENCE CHINA PRESS

Brown 可表示定理及其应用

献给刘绍学教授 90 华诞

鲍炎红[1], 叶郁[2], 章璞[3*], 张跃辉[3]

1. 安徽大学数学科学学院, 合肥 230601;
2. 中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026;
3. 上海交通大学数学科学学院, 上海 200240
E-mail: baoyh@ahu.edu.cn, yeyu@ustc.edu.cn, pzhang@sjtu.edu.cn, zyh@sjtu.edu.cn

收稿日期: 2017-08-02; 接受日期: 2018-01-15; 网络出版日期: 2018-06-04; * 通信作者
国家自然科学基金 (批准号: 11431010, 11401001 和 11571329) 资助项目

摘要 这篇综述从背景、证明方法和应用三方面, 为 Brown 可表示定理及其对偶提供一个易于理解的版本; 并通过 Serre 函子给出紧生成三角范畴之间伴随对的一种三分法.

关键词 伴随对 紧对象 coherent 函子 可表函子 紧 (对称, 完备) 生成的三角范畴 Brown 可表示定理及其对偶

MSC (2010) 主题分类 18E30, 16E35, 18A25, 18A40, 18A22, 16G10

1 引言

具有伴随的函子具有优良的性质. 一个函子何时具有伴随是同调代数的核心课题之一. Brown 可表示定理及其对偶是三角范畴中深刻的结果和有力的工具. 它们之所以重要, 原因之一是能够提供伴随函子存在的充分条件.

Brown 可表示定理的发展, 经历了从最强的紧生成的条件到目前的完备生成的条件. 而 Brown 可表示定理的对偶绝非简单地由 Brown 可表示定理通过对偶 (指在反范畴中使用 Brown 可表示定理) 就能得到, 它是在 Brown 可表示定理出现之后历经多年, 通过引入新的概念和方法, 才得到其目前的形式. 总之, Brown 可表示定理及其对偶的原证高度不平凡.

本文的目的是从问题起源、证明方法和应用三方面, 为 Brown 可表示定理及其对偶提供一个易于理解的版本. 我们用 Auslander [1] 的 coherent 函子范畴为工具, 通过 Krause [2] 提出的包含链

$$\{\text{紧生成三角范畴}\} \subseteq \{\text{对称生成三角范畴}\} \subseteq \{\text{完备生成三角范畴}\}$$

英文引用格式: Bao Y H, Ye Y, Zhang P, et al. Brown representability theorems with applications (in Chinese). Sci Sin Math, 2018, 48: 1507–1526, doi: 10.1360/N012017-00181

和 Neeman [3–5] 引入的同伦余极限, 给出目前 Brown 可表示定理及其对偶的最佳形式和证明; 并且得到紧生成三角范畴之间伴随对的一种三分法 (参见文献 [6]), 其中这两个紧生成三角范畴的紧对象作成的子范畴有 Serre 函子 (参见文献 [7,8]). 我们强调, 本文属综述性文章: 主要参考文献是 5 篇较难的论文 [1–4,9].

2 背景知识

本文中, 子范畴指对同构封闭的满子范畴; 共变函子简称函子. 范畴有直和是指有任意指标集的直和; 对直和封闭指对任意指标集的直和封闭. 若无特别说明, 我们并不假设范畴中有直和与直积.

2.1 紧对象

下述事实是熟知的.

引理 2.1 设 $\mathcal{C}$ 是加法范畴, $X \in \mathcal{C}$.

(i) 对任意直积 $\prod_{i\in I} Y_i \in \mathcal{C}$, 典范同态 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \prod_{i\in I} Y_i) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y_i)$ 是群同构;

(ii) 对任意直和 $\bigoplus_{i\in I} X_i \in \mathcal{C}$, 典范同态 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bigoplus_{i\in I} X_i, X) \to \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, X)$ 是群同构.

注 2.2 以下四种典范同态一般均非同构:

$$\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X, \bigoplus_{i\in I} X_i\right), \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X, \bigoplus_{i\in I} X_i\right) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X_i),$$
$$\mathrm{Hom}\left(\prod_{i\in I} X_i, X\right) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(X_i, X), \quad \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(X_i, X) \longrightarrow \mathrm{Hom}\left(\prod_{i\in I} X_i, X\right).$$

定义 2.3 加法范畴 $\mathcal{C}$ 中对象 X 称为 $\mathcal{C}$ 中的紧对象, 如果对 $\mathcal{C}$ 中任意直和 $\bigoplus_{i\in I} X_i$, 典范同态

$$\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X_i) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X, \bigoplus_{i\in I} X_i\right), \quad (f_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} e_i f_i$$

是同构, 其中 $e_i : X_i \to \bigoplus_{i\in I} X_i$ 是直和的结构态射.

注意这个典范同态总是单射. 由此可知, X 是 $\mathcal{C}$ 的紧对象当且仅当对 $\mathcal{C}$ 中任意直和 $\bigoplus_{i\in I} X_i$, 这个典范同态是满的, 即对任意态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \bigoplus_{i\in I} X_i)$, 存在 I 的某个有限子集 $J(f)$, 以及 $g\colon X \to \bigoplus_{i\in J(f)} X_i$, 使得 $f = \sigma g$, 其中 $\sigma\colon \bigoplus_{i\in J(f)} X_i \to \bigoplus_{i\in I} X_i$ 为嵌入态射.

注意, $\mathcal{C}$ 的子范畴中的紧对象未必是 $\mathcal{C}$ 中的紧对象. 容易看出紧对象的直和项仍是紧对象. 紧对象是广泛存在的. 例如, 在环 R 的模范畴 R-Mod 中, 每个有限生成 R- 模都是紧对象. 我们将看到, 紧对象这一概念有重要意义.

2.2 伴随对

如果 (F, G) 是伴随对, 则称 F 是一个左伴随 (或 F 有右伴随函子 G). 伴随对中的两个函子在自然同构的意义下互相唯一确定. 加法范畴之间的伴随对均是加法函子. 下列事实是熟知的 (参见文献 [10, 第 68 页]).

引理 2.4 设 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是加法范畴间的加法函子. 如果 F 是一个左伴随, 则 F 保持直和. 如果 F 是一个右伴随, 则 F 保持直积.

利用 Brown 可表示定理及其对偶, 我们将在定理 5.7 和 6.9 中看到, 如果 $\mathcal{C}$ 是紧生成的三角范畴, 则引理 2.4 中两条结论的逆对三角函子也是成立的.

因为等价函子既是左伴随又是右伴随 (逆不成立), 故加法范畴之间的等价必为加法函子. 由引理 2.4 知, 加法范畴之间的等价保持直和与直积. 下述事实给出了左伴随保持紧性的一个充分条件.

引理 2.5　设 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是加法函子且有右伴随 G. 若 G 保持直和, 则 F 保持紧对象.

特别地, 若 G 有右伴随, 则 F 保持紧对象.

证明　后一论断由引理 2.4 立知. 设 X 为 $\mathcal{C}$ 中紧对象. 我们要证 FX 为 $\mathcal{D}$ 中紧对象, 即对 $\mathcal{D}$ 中的每个直和 $\bigoplus_{i\in I}Y_i$, 典范同态 $s:\bigoplus_{i\in I}\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,Y_i)\to\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,\bigoplus_{i\in I}Y_i)$ 是同构.

(虽然有如下同构:

$$\begin{aligned}\bigoplus_{i\in I}\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,Y_i)&\cong\bigoplus_{i\in I}\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GY_i)\cong\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,\bigoplus_{i\in I}GY_i\right)\\&\cong\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}\left(X,G\bigoplus_{i\in I}Y_i\right)\cong\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\left(FX,\bigoplus_{i\in I}Y_i\right),\end{aligned}$$

但这并不能作为证明, 因为这并未说明这些同构的复合恰为 s.)

由 G 保持直和可知, 典范同态 a: $\bigoplus_{i\in I}GY_i\to G(\bigoplus_{i\in I}Y_i)$ 为同构, 且诱导同构 $a_*:\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\bigoplus_{i\in I}GY_i)\to\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G\bigoplus_{i\in I}Y_i)$ 使得下图中的右下角三角形可交换. 又因为 X 为 $\mathcal{C}$ 中的紧对象, 所以典范同态 $t:\bigoplus_{i\in I}\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GY_i)\to\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\bigoplus_{i\in I}GY_i)$ 为同构, 且下图中的左下角三角形可交换:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in I}\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,Y_i) \arrow[rr, "s"] \arrow[ddd] & & \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}\left(FX,\bigoplus_{i\in I}Y_i\right) \arrow[ddd] \\
& \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,Y_i) \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[d] & \\
& \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GY_i) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\bigoplus_{i\in I}(X,GY_i) \arrow[r, "t"] & \left(X,\bigoplus_{i\in I}GY_i\right) \arrow[r, "a_*"] & \left(X,G\bigoplus_{i\in I}Y_i\right).
\end{tikzcd}\tag{2.1}$$

再由直和的定义可知上面的三角形可交换, 而由伴随同构的自然性可知左右两个四边形可交换. 从而最外层的长方形可交换, 故 s 为同构. □

注 2.6　由引理 2.5 知, 加法范畴间的等价函子总是保持紧对象的. 特别地, 对于三角范畴中的紧对象 X, $X[n]$ 也是紧对象, $n\in\mathbb{Z}$.

我们将在推论 5.8 中看到, 若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 都是紧生成三角范畴, 则引理 2.5 的逆对三角函子也成立.

引理 2.7　(i) 设 (F,G) 是 Abel 范畴之间的伴随对. 若 G 是正合函子, 则 F 保持投射对象; 若 F 是正合函子, 则 G 保持内射对象.

(ii) 设 (F,G,η) 是加法范畴之间的伴随对, 且 G 为忠实函子, $f:FX\to Y$ 为态射. 若 $\eta_{X,Y}f$: $X\to GY$ 是满态射, 则 f 也是满态射.

(iii) 设 (F,G,η) 是加法范畴之间的伴随对, 且 F 为忠实函子, $f:FX\to Y$ 为态射. 若 f 是单态射, 则 $\eta_{X,Y}f:X\to GY$ 也是单态射.

证明　(i) 设 P 为投射对象. 显然, $\operatorname{Hom}(P,-)$ 是正合的. 于是由 G 的正合性和自然同构 $\operatorname{Hom}(FP,-)\cong\operatorname{Hom}(P,G-)$ 可知, $\operatorname{Hom}(FP,-)$ 正合, 即 FP 为投射的.

(ii) 设 $h: Y \to Z$ 为态射且 $hf = 0$. 要证 $h = 0$. 这由如下交换图以及 G 的忠实性即知:

$$\begin{tikzcd} (FX,Y) \arrow[r, "\eta_{X,Y}"] \arrow[d, "(FX,h)"] & (X,GY) \arrow[d, "(X,Gh)"] \\ (FX,Z) \arrow[r, "\eta_{X,Z}"] & (X,GZ). \end{tikzcd}$$

(iii) 类似可证. □

关于三角函子的一个基本结果是, 若 (F,G) 是三角范畴之间的伴随对, 则 F 是三角函子当且仅当 G 是三角函子 (参见文献 [11, 第 6.7 小节]、[12, 引理 8.3] 和 [5, 第 179 页]). 详细证明参见文献 [13, 第 17 页]. 这与 Abel 范畴之间的伴随对有很大不同: 若 (F,G) 是 Abel 范畴之间的伴随对, 则 F 是右正合函子, G 是左正合函子; 并且即便 F 正合, G 也未必正合; 即便 G 正合, F 也未必正合, 如经典的张量 -Hom 伴随对.

2.3 Serre 函子

设 $\mathcal{C}$ 为域 $\Bbbk$ 上 Hom- 有限范畴. $\Bbbk$- 线性函子 $S: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 称为右 Serre 函子, 如果对任意对象 X 和 Y, 存在 $\Bbbk$- 同构 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,SX)^*$, 且该同构对于 X 和 Y 都是自然的, 其中 $(-)^* = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(-,\Bbbk)$. 称 $\mathcal{C}$ 有 Serre 函子, 如果 $\mathcal{C}$ 有一个右 Serre 函子 S 且 S 是等价函子, 换言之, $\mathcal{C}$ 同时有左、右 Serre 函子 (参见文献 [7,8]). 设 $\mathcal{C}$ 是域 $\Bbbk$ 上 Hom- 有限的 Krull-Schmidt 三角范畴, 则 $\mathcal{C}$ 有 Serre 函子当且仅当 $\mathcal{C}$ 有 Auslander-Reiten 三角, 参见文献 [8, 定理 I.2.4].

引理 2.8 [6] 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为具有 Serre 函子的范畴, $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为加法函子且有右伴随 G, 则 F 有左伴随 $S_{\mathcal{C}}^{-1}GS_{\mathcal{D}}$, 且 G 有右伴随 $S_{\mathcal{D}}FS_{\mathcal{C}}^{-1}$, 其中 $S_{\mathcal{C}}$ 和 $S_{\mathcal{D}}$ 分别为 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 的右 Serre 函子.

证明 对任意 $X \in \mathcal{C}$ 和 $Y \in \mathcal{D}$, 有

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S_{\mathcal{C}}^{-1}GS_{\mathcal{D}}Y, X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GS_{\mathcal{D}}Y)^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, S_{\mathcal{D}}Y)^* \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, FX).$$

类似可证, $(G, S_{\mathcal{D}}FS_{\mathcal{C}}^{-1})$ 为伴随对. □

设 A 是有限维代数. 记 $D^b(A\text{-mod})$ 是有限生成 A- 模的有界导出范畴, $K^b(A\text{-proj})$ $(K^b(A\text{-inj}))$ 是有限生成投射 (内射) A- 模的有界同伦范畴.

引理 2.9 (参见文献 [14, 引理 1.5 和定理 3.4]) 设 A 是有限维代数, 则 A 是 Gorenstein 代数当且仅当在 $D^b(A\text{-mod})$ 中, $K^b(A\text{-proj}) = K^b(A\text{-inj})$. 此时, $K^b(A\text{-proj})$ 有 Serre 函子.

3 $D^*(R\text{-Mod})$ 中的紧对象

设 R 是环, R-Mod 为 R 上的左模范畴. 记 R-Proj 是所有投射 R- 模构成的子范畴, R-proj 为所有有限生成投射 R- 模构成的子范畴, 则 $R\text{-Proj} = \mathrm{Add}R$, $R\text{-proj} = \mathrm{add}R$, 其中 $\mathrm{Add}R$ 是 R-Mod 中 R 的所有直和的直和项构成的子范畴, $\mathrm{add}R$ 是 R-mod 中 R 的所有有限直和的直和项构成的子范畴. 记 $D^{*c}(R\text{-Mod})$ 为 $D^*(R\text{-Mod})$ 中所有紧对象构成的满子范畴, 其中 $* \in \{b, -, \mathrm{blank}\}$. 本节的目的是确定 $D^{*c}(R\text{-Mod})$.

3.1　$\langle C\rangle_{\mathbf{sum}}^{c}$ 中的紧对象

设 $\mathcal{T}$ 是有直和的三角范畴. 记 $\mathcal{T}^c$ 为所有紧对象构成的子范畴. 由五引理知 $\mathcal{T}^c$ 是 $\mathcal{T}$ 的厚子范畴, 即 $\mathcal{T}^c$ 是 $\mathcal{T}$ 的三角子范畴且对直和项封闭. 注意, 对直和封闭的三角子范畴总是厚子范畴 (参见文献 [15] 或 [13, 命题 3.6.1]).

命题 3.1 (参见文献 [9, 引理 2.2])　设 $\mathcal{T}$ 为有直和的三角范畴, C 为 $\mathcal{T}$ 中的一个紧对象集. 记 $\langle C\rangle_{\text{sum}}$ 为 $\mathcal{T}$ 的含有 C 且对直和封闭的最小三角子范畴, $\langle C\rangle_{\text{summand}}$ 为 $\mathcal{T}$ 中含有 C 且对直和项封闭的最小三角子范畴, 则 $\langle C\rangle_{\text{sum}}^{c}=\langle C\rangle_{\text{summand}}$. 特别地, $\langle C\rangle_{\text{sum}}^{c}=\mathcal{T}^c\cap\langle C\rangle_{\text{sum}}$.

证明　不失一般性可设 C 对 [1] 和 [−1] 封闭. 注意到 $\langle C\rangle_{\text{summand}}\subseteq\mathcal{T}^c$. 因 $\langle C\rangle_{\text{sum}}$ 对直和封闭, 故它对直和项也封闭, $\langle C\rangle_{\text{summand}}\subseteq\langle C\rangle_{\text{sum}}$. 于是, $\langle C\rangle_{\text{summand}}\subseteq\mathcal{T}^c\cap\langle C\rangle_{\text{sum}}\subseteq\langle C\rangle_{\text{sum}}^{c}$.

反之, 设 $X\in\langle C\rangle_{\text{sum}}^{c}$. 由定义可知, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,-)$ 与 $\langle C\rangle_{\text{sum}}$ 中直和可交换. 但它与 $\mathcal{T}$ 中的直和是否可交换尚未可知. 对两个态射 $X=X\leftarrow 0$ 应用下述引理 3.2 可得 $X'\xrightarrow{0}X$, 使得存在好三角 $X'\xrightarrow{0}X\to W\to X'[1]$ 且 $W\in\langle C\rangle_{\text{summand}}$. 由此可知, X 是 W 的一个直和项, 从而, $X\in\langle C\rangle_{\text{summand}}$. □

引理 3.2 (参见文献 [9, 引理 2.3])　设 $\mathcal{T}$ 和 C 同命题 3.1, $X\in\langle C\rangle_{\text{sum}}^{c}$, 则对任意两个态射 $X\xrightarrow{a}Y\xleftarrow{f}Y'$, 若好三角 $Y'\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\to Y'[1]$ 满足 $Z\in\langle C\rangle_{\text{sum}}$, 则存在态射 $X'\xrightarrow{b}X$ 使得好三角 $X'\xrightarrow{b}X\to W\to X'[1]$ 满足 $W\in\langle C\rangle_{\text{summand}}$, 且复合态射 $ab: X'\to Y$ 可经过 $f: Y'\to Y$ 分解.

证明　不失一般性可设 C 对 [1] 和 [−1] 封闭. 由定义可知, $\langle C\rangle_{\text{sum}}=\bigcup_{i\geqslant 0}\langle C\rangle_{\text{sum},i}$, 其中 $\langle C\rangle_{\text{sum},0}$ 是 $\mathcal{T}$ 中由 C 中对象的直和构成的子范畴, 且对 $i\geqslant 1$, $\langle C\rangle_{\text{sum},i}$ 为 $\mathcal{T}$ 中由对象类

$$\{Z\mid \text{存在好三角 } U\to Z\to V\to U[1],\, U,V\in\langle C\rangle_{\text{sum},i-1}\}$$

构成的子范畴. 对 $l(Z)$ 用数学归纳法, 其中 $l(Z)$ 为满足 $Z\in\langle C\rangle_{\text{sum},n}$ 最小的整数 n.

若 $l(Z)=0$, 则 $Z=\bigoplus_{i\in I}Z_i$, $Z_i\in C$. 由假设知,

$$\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Hom}(X,Z_i)\cong\mathrm{Hom}\Big(X,\bigoplus_{i\in I}Z_i\Big).$$

于是, $ga: X\to Z$ 可经过 F 分解, 其中 F 是 Z 的直和项且 F 是 Z_i 的有限直和. 显然,

$$F\in\langle C\rangle_{\text{summand}}.$$

将 $X\to F$ 嵌入好三角, 由下图中间方块的交换性可得态射 $X'\xrightarrow{b}X$ 满足所需:

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "b"] \arrow[d, dashed] & X \arrow[r] \arrow[d, "a"] & F \arrow[r] \arrow[d] & X'[1] \arrow[d] \\
Y' \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & Y'[1].
\end{tikzcd}$$

假设 $l(Z)=n>0$, 则存在好三角 $U\to Z\to V\to U[1]$ 满足 $U,V\in\langle C\rangle_{\text{sum},n-1}$. 利用基变换可得如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
 & V[-1] \arrow[r, equal] \arrow[d] & V[-1] \arrow[d] & \\
Y' \arrow[r, "d"] \arrow[d, equal] & Y'' \arrow[r] \arrow[d, "c"] & U \arrow[r] \arrow[d] & Y'[1] \arrow[d, equal] \\
Y' \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & Y'[1] \arrow[d] \\
 & V \arrow[r, equal] & V \arrow[r] & Y''[1],
\end{tikzcd}$$

其中行、列均为好三角. 对两个态射 $X \overset{a}{\to} Y \overset{c}{\leftarrow} Y''$, 用归纳假设可得态射 $X'' \overset{b''}{\to} X$, 使得存在好三角 $X'' \overset{b''}{\to} X \to \widetilde{W} \to X''[1]$ 满足 $\widetilde{W} \in \langle C\rangle_{\text{summand}}$, 且复合态射 $ab'' : X'' \to Y$ 可经过 $c : Y'' \to Y$ 分解, 即存在某个 $e : X'' \to Y''$ 使得 $ab'' = ce$. 注意到 $X'' \in \langle C\rangle^{c}_{\text{sum}}$.

对两个态射 $X'' \overset{e}{\to} Y'' \overset{d}{\leftarrow} Y'$, 用归纳假设可得态射 $X' \overset{b'}{\to} X''$, 使得存在好三角 $X' \overset{b'}{\to} X'' \to W' \to X'[1]$ 满足 $W' \in \langle C\rangle_{\text{summand}}$, 且复合态射 $eb' : X' \to Y''$ 可经过 $d : Y' \to Y''$ 分解.

由此可得态射 $X' \overset{b''b'}{\to} X$, 使得复合态射 $ab''b' : X' \to Y''$ 可经过 $f = cd : Y' \to Y$ 分解. 由八面体公理得到交换图

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, equal] \arrow[d, "b'"'] & X' \arrow[d, "b''b'"'] & & \\
X'' \arrow[r, "b''"] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{W} \arrow[r] \arrow[d, equal] & X''[1] \arrow[d] \\
W' \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{W} \arrow[r] \arrow[d] & W'[1] \\
X'[1] \arrow[r, equal] & X'[1] \arrow[r] & X''[1]. &
\end{tikzcd}$$

由此结论得证. □

3.2 $K^b(\mathcal{P}(\mathcal{A}))$ 的描述

引理 3.3 设 $\mathcal{A}$ 是有足够多投射对象的 Abel 范畴, $\mathcal{P} := \mathcal{P}(\mathcal{A})$ 是其投射对象构成的子范畴. 设 $X \in D^*(\mathcal{A})$, 其中 $* \in \{b, -, \text{blank}\}$, 则 $X \in K^b(\mathcal{P})$ 当且仅当存在有限集 $I(X) \subseteq \mathbb{Z}$, 使得 $\mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(X, M[j]) = 0, \forall j \notin I(X), \forall M \in \mathcal{A}$.

证明 这里只证明充分性. 取拟同构 $Q \to X$ 使得 $Q \in K(\mathcal{P})$ 和 Q 是同伦投射的 (其存在性参见文献 [13, 定理 4.5.4]). 断言 $\mathrm{H}^{-n}Q = 0, \forall n \notin I(X)$. 事实上, 由假设知,

$$0 = \mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(X, \mathrm{Coker}d_Q^{-n-1}[n]) = \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(Q, \mathrm{Coker}d_Q^{-n-1}[n]).$$

从而典范满态射 $\pi : Q^{-n} \to \mathrm{Coker}d_Q^{-n-1}$ 可分解为 $\pi = fd_Q^{-n}$, 其中 $f : Q^{-n+1} \to \mathrm{Coker}d_Q^{-n-1}$, 即 $\pi(\mathrm{Ker}d_Q^{-n}) = 0$. 这就证明了断言.

由此可知, 在 $D^*(\mathcal{A})$ 中, Q 同构于有界复形

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Im}\, d_Q^{-n} \longrightarrow Q^{-n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q^m \longrightarrow \mathrm{Im}\, d_Q^m \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

其中 $n \notin I(X)$, $-m \notin I(X)$.

至此, 只需证明 $\mathrm{Im}\, d_Q^{-n} \in \mathcal{P}$ 且 $\mathrm{Im}\, d_Q^m \in \mathcal{P}$. 否则, 可设 $M := \mathrm{Im}d_Q^m \notin \mathcal{P}$. 记 $\widetilde{d^m} : Q^m \to M = \mathrm{Im}d_Q^m$ 为 d_Q^m 诱导的典范满同态, 则

$$\widetilde{d^m} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q^m, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(d^{m-1}, M)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q^{m-1}, M));$$

但

$$\widetilde{d^m} \notin \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q^{m+1}, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(d^m, M)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q^m, M)),$$

否则, $\mathrm{Im}d^m \hookrightarrow Q^{m+1}$ 为可裂单, 这与 $M \notin \mathcal{P}$ 相矛盾. 从而, $\mathrm{H}^{-m}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q, M) \neq 0$. 于是,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(X, M[-m]) &\cong \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(Q, M[-m]) \cong \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(Q, M[-m]) \\ &= \mathrm{H}^{-m}\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Q, M) \neq 0,\end{aligned}$$

其中最后一个等号由关键公式可知. 这与 $-m \notin I(X)$ 矛盾. □

3.3 $D^*(R\text{-Mod})$ 中的紧对象

设 R 是环. 对 $\mathcal{A} := R$-Mod 应用引理 3.3 得到下面的引理:

引理 3.4 设 R 是环, $X \in D^*(R\text{-Mod})$, 其中 $* \in \{b, -, \text{blank}\}$, 则下述等价 :

(i) $X \in K^b(R\text{-proj})$;

(ii) X 为 $D^*(R\text{-Mod})$ 中紧对象, 且 $X \in K^b(R\text{-Proj})$;

(iii) X 为 $D^*(R\text{-Mod})$ 中紧对象, 且存在有限集 $I(X) \subseteq \mathbb{Z}$, 使得 $\mathrm{Hom}_{D^*(R\text{-Mod})}(X, M[j]) = 0$, $\forall\, j \notin I(X)$, $\forall\, M \in R$-Mod.

进而, $K^b(R\text{-proj})$ 对 $D^*(R\text{-Mod})$ 中的直和项封闭. 从而, $K^b(R\text{-proj})$ 是 $D^*(R\text{-Mod})$ 中包含 R 最小的厚子范畴.

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) 显然. 由引理 3.3 直接得到 (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). 对于 (ii) $\Rightarrow$ (i), 容易看出 X 的每一项都在 R-proj 中.

由 (iii) 可知, $K^b(R\text{-proj})$ 对 $D^*(R\text{-Mod})$ 中的直和项封闭. □

对 $\mathcal{T} := D^*(R\text{-Mod})$ 应用命题 3.1 可得下面的定理.

定理 3.5 (参见文献 [9, 定理 2.1]、[11] 和 [3, 定理 2.1]) 设 R 是环, 则

$$D^{*c}(R\text{-Mod}) = K^b(R\text{-proj}),$$

其中 $* \in \{b, -, \text{blank}\}$.

证明 在命题 3.1 中取 $C := \{{}_R R\}$. 显然, $D^*(R\text{-Mod}) = \langle R\rangle_{\text{sum}}$ (参见文献 [13, 命题 5.3.3]). 由引理 3.4 知, $K^b(R\text{-proj}) = \langle R\rangle_{\text{summand}}$. 从而, 由命题 3.1 有 $D^{*c}(R\text{-Mod}) = K^b(R\text{-proj})$. □

4 Coherent 函子范畴

4.1 函子范畴

设 $\mathcal{C}$ 是小加法范畴. 记 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ 是 $\mathcal{C}$ 到 Abel 群范畴 Ab 的所有反变函子构成的范畴. 记 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathrm{Ab})$ 是 $\mathcal{C}$ 到 Ab 的共变函子范畴. 为确保函子间的自然变换是集合而非类, 需假设 $\mathcal{C}$ 是小范畴. 但即便无此假设, 以下考虑也无问题.

引理 4.1 设 $\mathcal{C}$ 为小加法范畴, 则

(i) $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ 和 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathrm{Ab})$ 是 Abel 范畴.

(ii) 设 $0 \to F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H \to 0$ 是 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ (或 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathrm{Ab})$) 中序列, 则它是正合列当且仅当对每个对象 $X \in \mathcal{C}$, $0 \to FX \xrightarrow{\alpha_X} GX \xrightarrow{\beta_X} HX \to 0$ 是 Abel 群的正合列.

(iii) 若 $\mathcal{C}$ 有直和, 则 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ 和 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathrm{Ab})$ 也有直和: $\bigoplus_{i\in I} F_i$ 由 $X \mapsto \bigoplus_{i\in I}(F_iX)$ 给出.

证明 (i) 设 $F \xrightarrow{\eta} G$ 是 $\mathcal{C}$ 到 Ab 的反变函子之间的自然变换, 则函子 $\mathrm{Coker}\eta$ 由 $X \mapsto \mathrm{Coker}\eta_X$ $(\forall\, X \in \mathcal{C})$ 给出. 直接验证可知典范满同态 $GX \xrightarrow{\pi_X} \mathrm{Coker}\eta_X$ 定义一个自然变换 $\pi: G \to \mathrm{Coker}\eta$. 同样, 函子 $\mathrm{Ker}\eta$ 由 $X \mapsto \mathrm{Ker}\eta_X$ $(\forall\, X \in \mathcal{C})$ 给出, 且典范单同态 $\mathrm{Ker}\eta_X \xrightarrow{\sigma_X} FX$ 定义一个自然变换 $\mathrm{Ker}\eta \xrightarrow{\sigma} F$. 显然, $\pi: G \to \mathrm{Coker}\eta$ 的核典范同构于 $\sigma: \mathrm{Ker}\eta \to F$ 的余核.

(ii) 由 (i) 的证明即可看出结论 (ii).

(iii) 设 F 是由 $X \mapsto \bigoplus_{i\in I}(F_iX)$ 确定的函子. 令 $F_i \xrightarrow{e_i} F$ 是由 $e_{i,X}: F_iX \to FX = \bigoplus_{i\in I}(F_iX)$ 给出的自然变换, 其中 $e_{i,X}$ 是 $\bigoplus_{i\in I}(F_iX)$ 的结构同态, 易证 (F, e_i) 是 F_i 的直和. □

4.2 有限表现对象

设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴, $\mathcal{P}$ 是 $\mathcal{A}$ 的一些 (未必全部) 投射对象构成的子范畴. 一个对象 $X \in \mathcal{A}$ 称为关于 $\mathcal{P}$ 是有限表现的, 如果存在正合列 $P_1 \to P_0 \to X \to 0$, 其中 $P_0, P_1 \in \mathcal{P}$. 记 $\mathrm{FP}(\mathcal{P})$ 为所有关于 $\mathcal{P}$ 有限表现的对象构成的子范畴.

命题 4.2 (参见文献 [1, 命题 2.1]) $\mathrm{FP}(\mathcal{P})$ 对扩张和余核闭.

证明 设 $0 \to C_1 \to C_2 \to C_3 \to 0$ 为 $\mathcal{A}$ 中正合列且 $C_1, C_3 \in \mathrm{FP}(\mathcal{P})$. 由马蹄引理有 $C_2 \in \mathrm{FP}(\mathcal{P})$.

设 $C_2 \xrightarrow{f} C_3 \to C_4 \to 0$ 是正合列且 $C_2, C_3 \in \mathrm{FP}(\mathcal{P})$. 设 $P_1 \to P_0 \to C_2 \to 0$ 和 $Q_1 \to Q_0 \to C_3 \to 0$ 分别是 C_2 和 C_3 在 $\mathcal{P}$ 中的有限表现, 即 $P_i, Q_i \in \mathcal{P}$. 由比较定理知, $f : C_2 \to C_3$ 诱导链映射, 仍记为 f:

$$\begin{tikzcd}
P^\bullet \cdots \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_P"] \arrow[d, "b"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "a"] & 0 \\
Q^\bullet \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Q_1 \arrow[r, "d_Q"] & Q_0 \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

考虑同伦范畴 $K(\mathcal{A})$ 中好三角 $P^\bullet \xrightarrow{f} Q^\bullet \to \mathrm{Cone}(f) \to P^\bullet[1]$, 其中 $\mathrm{Cone}(f) = P^\bullet[1] \oplus Q^\bullet$ 为映射锥

$$\cdots \to 0 \to P_1 \xrightarrow{\binom{-d_P}{b}} P_0 \oplus Q_1 \xrightarrow{(a\ \ d_Q)} Q_0 \to 0.$$

由此可得长正合列

$$\cdots \to \mathrm{H}_1 P^\bullet \to \mathrm{H}_1 Q^\bullet \to \mathrm{H}_1\mathrm{Cone}(f) \to \mathrm{H}_0 P^\bullet \to \mathrm{H}_0 Q^\bullet \to \mathrm{H}_0\mathrm{Cone}(f) \to 0,$$

其中

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}_0 P^\bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{H}_0 Q^\bullet \arrow[d, equal] \\
C_2 \arrow[r, "f"] & C_3
\end{tikzcd}$$

交换. 故

$$\mathrm{H}_0\mathrm{Cone}(f) \cong \mathrm{Coker} f \cong C_4.$$

再由正合列 $P_0 \oplus Q_1 \to Q_0 \to \mathrm{H}_0\mathrm{Cone}(f) \to 0$, 即知 $C_4 \in \mathrm{FP}(\mathcal{P})$. □

4.3 Coherent 函子

设 $\mathcal{C}$ 为加法范畴. 仅考虑 $\mathcal{C}$ 到 Ab 的反变函子. 对于共变函子有对偶的结果. 将反变函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$ 简记为 $(-, X)$. 我们将反变函子 $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Ab}$ 写成 (共变) 函子 $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$. 函子 $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$ 称为 coherent 函子, 如果存在 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ 中的正合列 $(-, X) \to (-, Y) \to F \to 0$, 其中 $X, Y \in \mathcal{C}$ (或等价地, 对任意 $W \in \mathcal{C}$, $(W, X) \to (W, Y) \to FW \to 0$ 是 Abel 群的正合列). 由 Yoneda 引理知两个 coherent 函子之间的所有自然变换作成集合. 记 $\widehat{\mathcal{C}}$ 是 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 到 Ab 的 coherent 函子作成的范畴.

命题 4.3 设 $\mathcal{C}$ 是加法范畴, 则 $\widehat{\mathcal{C}}$ 是加法范畴, 并且

(i) $\widehat{\mathcal{C}}$ 有余核.

(ii) 如果 $\mathcal{C}$ 有弱核 (指 $\mathcal{C}$ 中的每个态射 $Y \to Z$ 都有弱核 $X \to Y$, 即对每个 $W \in \mathcal{C}$, $(W, X) \to (W, Y) \to (W, Z)$ 都是 Abel 群的正合列), 则 $\widehat{\mathcal{C}}$ 有核且 $\widehat{\mathcal{C}}$ 是 Abel 范畴.

(iii) $\widehat{\mathcal{C}}$ 中任意函子将 $\mathcal{C}$ 中的直和变为 Ab 中直积.

(iv) 若 $\mathcal{C}$ 有直和, 则 $(-, X_i)$ 在 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中也有直和, 且 $\bigoplus_{i \in I}(-, X_i) = (-, \bigoplus_{i \in I} X_i)$ (它不是 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ 中的直和).

(v) 若 $\mathcal{C}$ 有直和, 则 $\widehat{\mathcal{C}}$ 也有直和. 具体地, 设 $F_i \in \widehat{\mathcal{C}}$, 且有 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ 中正合列

$$(-, X_i) \stackrel{(-,f_i)}{\to} (-, Y_i) \stackrel{\pi_i}{\to} F_i \to 0,$$

其中 $i \in I$, I 为指标集. 设 (F, π) 是 $(-, \bigoplus_{i\in I} f_i) : (-, \bigoplus_{i\in I} X_i) \to (-, \bigoplus_{i\in I} Y_i)$ 在 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ 中的余核, 则 F 为 F_i 在 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中的直和.

(vi) 若 $\mathcal{C}$ 有直和, 则由 $X \mapsto (-, X)$ 给出的 Yoneda 函子 $Y : \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ 保持直和.

证明 设 $F \stackrel{\eta}{\to} G$ 为自然变换, $F, G \in \widehat{\mathcal{C}}$, 则有行正合的交换图

$$\begin{tikzcd}
(-,X) \arrow[r, "{(-,f)}"] \arrow[d, "{(-,b)}"'] & (-,Y) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "{(-,a)}"'] & F \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & 0 \\
(-,X') \arrow[r, "{(-,g)}"] & (-,Y') \arrow[r, "\beta"] & G \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

由此可知 $\widehat{\mathcal{C}}$ 为加法范畴.

(i) 取 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$, $\mathcal{P}$ 为所有可表函子组成的子范畴. 由 Yoneda 引理知, 可表函子是范畴 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ 的投射对象. 由命题 4.2 知 $\widehat{\mathcal{C}}$ 有余核 (即便 $\mathcal{C}$ 不是小范畴, 这仍然成立).

(ii) 只需证 $\mathrm{Ker}\eta \in \widehat{\mathcal{C}}$. 设 $\binom{c}{-d} : Y'' \to Y \oplus X'$ 为 $(a, g) : Y \oplus X' \to Y'$ 的一个弱核, $\binom{h}{-j} : X'' \to Y'' \oplus X$ 为 $(c, f) : Y'' \oplus X \to Y$ 的一个弱核. 由追图法易知有如下行正合的交换图:

$$\begin{tikzcd}
(-,X'') \arrow[r, "{(-,h)}"] \arrow[d, "{(-,j)}"'] & (-,Y'') \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "{(-,c)}"] & \mathrm{Ker}\eta \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & 0 \\
(-,X) \arrow[r, "{(-,f)}"] \arrow[d, "{(-,b)}"'] & (-,Y) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "{(-,a)}"] & F \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & 0 \\
(-,X') \arrow[r, "{(-,g)}"] & (-,Y') \arrow[r, "\beta"] & G \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

即 $\mathrm{Ker}\eta \in \widehat{\mathcal{C}}$.

(iii) 显然可表函子将 $\mathcal{C}$ 中直和变成直积. 再由蛇引理可知 coherent 函子也将直和变成直积.

(iv) 设 $e_i \colon X_i \to \bigoplus_{i\in I} X_i$ 是 $\mathcal{C}$ 中直和 $\bigoplus_{i\in I} X_i$ 的结构态射. 下面证明 $(-, e_i) \colon (-, X_i) \to (-, \bigoplus_{i\in I} X_i)$ 是直和 $\bigoplus_{i\in I} (-, X_i)$ 中的结构态射. 事实上, 对任意 $i \in I$, 设 u_i 为从 $(-, X_i)$ 到 coherent 函子 G 的任意自然变换. 由 Yoneda 引理和命题 4.3(iii), 有

$$\mathrm{Hom}\left(\left(-, \bigoplus_{i\in I} X_i\right), G\right) \cong G\left(\bigoplus_{i\in I} X_i\right) \cong \prod_{i\in I} G(X_i).$$

对任意 $i \in I$, 令 $x_i = u_{i,X_i}(\mathrm{Id}_{X_i}) \in G(X_i)$, 则 $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G(X_i)$. 由上述同构知, 存在唯一的自然变换 $u \colon (-, \bigoplus_{i\in I} X_i) \to G$, 使得对每个 $i \in I$, 有 $u(-, e_i) = u_i$. 从而, $(-, \bigoplus_{i\in I} X_i) = \bigoplus_{i\in I} (-, X_i)$.

(v) 设 $F_i \in \widehat{\mathcal{C}}$, 且对 $i \in I$, $(-, X_i) \stackrel{(-,f_i)}{\to} (-, Y_i) \stackrel{\pi_i}{\to} F_i \to 0$ 是 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ 中正合列. 设 (F, π) 是 $(-, \bigoplus_{i\in I} f_i) : (-, \bigoplus_{i\in I} X_i) \to (-, \bigoplus_{i\in I} Y_i)$ 在 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ 中的余核, 则有 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ 中正合列

$$\left(-, \bigoplus_{i\in I} X_i\right) \xrightarrow{(-,\bigoplus_{i\in I} f_i)} \left(-, \bigoplus_{i\in I} Y_i\right) \stackrel{\pi}{\to} F \to 0,$$

从而, $F \in \widehat{\mathcal{C}}$. 断言 F 就是 F_i $(i \in I)$ 在 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中的直和. 事实上, 设 $e_i\colon X_i \to \bigoplus_{i\in I} X_i$ 和 $e'_i\colon Y_i \to \bigoplus_{i\in I} Y_i$ 分别是 $\bigoplus_{i\in I} X_i$ 和 $\bigoplus_{i\in I} Y_i$ 的结构态射. 由余核的定义可知, 对 $i \in I$, 存在唯一态射 w_i 使得 $w_i\pi_i = \pi(-, e'_i)$. 下证 w_i 即为直和 $\bigoplus_{i\in I} F_i$ 中的结构态射. 对于 $G \in \widehat{\mathcal{C}}$ 和任意一族态射 $u_i\colon F_i \to G$ $(i \in I)$, 我们有

$$\begin{tikzcd}
(-,X_i) \arrow[r, "(-,f_i)"] \arrow[dd, "(-,e_i)"'] & (-,Y_i) \arrow[rr, "\pi_i"] \arrow[dd, "(-,e'_i)"'] & & F_i \arrow[r] \arrow[dl, "u_i"'] \arrow[dd, "w_i"] & 0 \\
& & G & & \\
\left(-,\bigoplus\limits_{i\in I} X_i\right) \arrow[r, "(-,\bigoplus_{i\in I} f_i)"] & \left(-,\bigoplus\limits_{i\in I} Y_i\right) \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "\pi"] & & F \arrow[ul, dashed, "v"'] \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

由 (iv) 的证明可知, $(-, e_i)$ 与 $(-, e'_i)$ 分别是直和 $\bigoplus_{i\in I}(-, X_i) = (-, \bigoplus_{i\in I} X_i)$ 与 $\bigoplus_{i\in I}(-, Y_i) = (-, \bigoplus_{i\in I} Y_i)$ 的结构态射. 因此存在唯一态射 u 使得 $u_i\pi_i = u(-, e_i)$. 显然, $u(-, \bigoplus_{i\in I} f_i) = 0$. 由余核的定义知, 存在唯一态射 v 使得 $u = v\pi$. 于是, 对任意 $i \in I$, 有 $vw_i\pi_i = v\pi(-, e'_i) = u(-, e'_i) = u_i\pi_i$, 故 $vw_i = u_i$.

(vi) 由本命题结论 (iv) 即知 (vi). □

注 4.4 命题 4.3(iv) 说, $(-, \bigoplus_{i\in I} X_i)$ 是 $(-, X_i)$ $(i \in I)$ 在 $\widehat{\mathcal{C}}$ 中的直和, 但它不是在 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ 中的直和, 见引理 4.1(iii). 因此, 命题 4.3(iv) 不能理解为 $\bigoplus_{i\in I}(W, X_i) \cong (W, \bigoplus_{i\in I} X_i)$, 而只能理解为

$$\left(\bigoplus_{i\in I}(-, X_i)\right)(W) \cong \left(W, \bigoplus_{i\in I} X_i\right).$$

4.4 Coherent 函子的限制

设 $\mathcal{C}$ 是有直和的加法范畴, $\mathcal{S}_0$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个对象集. 记 $\mathrm{Add}\mathcal{S}_0$ 为包含 $\mathcal{S}_0$ 且对直和与直和项都封闭的 $\mathcal{C}$ 的最小加法子范畴. 记 $\mathcal{S} := \mathrm{Add}\mathcal{S}_0$. 考虑 $\mathcal{S}$ 到 Ab 的反变 coherent 函子范畴 $\widehat{\mathcal{S}}$. 在命题 4.3(i)–4.3(v) 中用 $\mathcal{S}$ 替换 $\mathcal{C}$ 即得下面的推论.

推论 4.5 (i) $\widehat{\mathcal{S}}$ 是有余核的加法范畴.

(ii) 若 $\mathcal{C}$ 有弱核, 则 $\mathcal{S}$ 也有弱核, 进而 $\widehat{\mathcal{S}}$ 为 Abel 范畴.

(iii) $\widehat{\mathcal{S}}$ 中函子将 $\mathcal{S}$ 中直和变为 Ab 中直积.

(iv) 设 $S_i \in \mathcal{S}$, $i \in I$, 则 $(-, S_i)|_{\mathcal{S}}$ $(i \in I)$ 在 $\widehat{\mathcal{S}}$ 中的直和存在, 且在 $\widehat{\mathcal{S}}$ 中有 $\bigoplus_{i\in I}(-, S_i)|_{\mathcal{S}} = (-, \bigoplus_{i\in I} S_i)|_{\mathcal{S}}$ (注意, 这不是 $\mathrm{Func}(\mathcal{S}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ 中的直和).

(v) $\widehat{\mathcal{S}}$ 有直和. 具体地, 设 $F_i \in \widehat{\mathcal{C}}$, $i \in I$, 且 $(-, S_{1,i})|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{(-,f_i)|_{\mathcal{S}}} (-, S_{0,i})|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\pi_i} F_i \to 0$ 在 $\mathrm{Func}(\mathcal{S}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ 中正合, 其中 $S_{0,i} \in \mathcal{S}$, $S_{1,i} \in \mathcal{S}$. 设 (F, π) 是 $(-, \bigoplus_{i\in I} f_i)|_{\mathcal{S}} : (-, \bigoplus_{i\in I} S_{1,i})|_{\mathcal{S}} \to (-, \bigoplus_{i\in I} S_{0,i})|_{\mathcal{S}}$ 的余核, 则 F 为 F_i 在 $\widehat{\mathcal{S}}$ 中的直和.

证明 只需证 (ii). 设 $Y \to Z$ 为 $\mathcal{S}$ 中任意态射, $X \to Y$ 为 $Y \to Z$ 在 $\mathcal{C}$ 中的弱核. 取 X 的右 $\mathcal{S}$-逼近 $\widetilde{S} \to X$, 其中 $\widetilde{S} := \bigoplus_{S\in\mathcal{S}_0} S^{\oplus \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S,X)} \in \mathcal{S}$, 则对每个对象 $S \in \mathcal{S}$, $\mathrm{Hom}(S, \widetilde{S}) \to \mathrm{Hom}(S, X)$ 为满射. 进而 $\widetilde{S} \to Y$ 为 $Y \to Z$ 在 $\mathcal{S}$ 中的弱核. □

引理 4.6 设 $\mathcal{C}$ 是有直和与弱核的加法范畴, $\mathcal{S}_0$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个对象集, $\mathcal{S} := \mathrm{Add}\mathcal{S}_0$. 若 $F \in \widehat{\mathcal{C}}$, 则 $F|_{\mathcal{S}} \in \widehat{\mathcal{S}}$. 进而, 由 $F \mapsto F|_{\mathcal{S}}$ 给出的限制函子 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab}) \to \mathrm{Func}(\mathcal{S}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ 诱导出正合函子 $\widehat{\mathcal{C}} \to \widehat{\mathcal{S}}$.

证明 设 $(-, C_1) \overset{(-,a)}{\to} (-, C_0) \overset{\pi}{\to} F \to 0$ 是 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ 中正合列, $C_0, C_1 \in \mathcal{C}$. 取 C_0 的右 $\mathcal{S}$-逼近 $b : S_0 \to C_0$, 则有满态射 $(-, S_0)|_{\mathcal{S}} \to F|_{\mathcal{S}}$. 设 $\binom{-d}{c} : W \to S_0 \oplus C_1$ 是 $(b, a) : S_0 \oplus C_1 \to C_0$ 在 $\mathcal{C}$

中的弱核, 则

$$(-,W)\overset{(-,\binom{-d}{c})}{\to}(-,S_0\oplus C_1)\overset{(-,(b,a))}{\to}(-,C_0)\to 0$$

是 $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$ 中正合列. 由此可得如下行正合的交换图:

$$\begin{tikzcd}
(-,W) \arrow[r, "{(-,d)}"] \arrow[d, "{(-,c)}"'] & (-,S_0) \arrow[r, "{\pi(-,b)}"] \arrow[d, "{(-,b)}"'] & F \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
(-,C_1) \arrow[r, "{(-,a)}"] & (-,C_0) \arrow[r, "\pi"] & F \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

再取 W 的一个右 $\mathcal{S}$- 逼近 $S_1\to W$, 则 $(-,S_1)\,|_{\mathcal{S}}\to(-,W)\,|_{\mathcal{S}}$ 为满态射. 由此可得 $\mathrm{Func}(\mathcal{S}^{\mathrm{op}},\mathrm{Ab})$ 中正合列 $(-,S_1)\,|_{\mathcal{S}}\to(-,S_0)\,|_{\mathcal{S}}\to F\,|_{\mathcal{S}}\to 0$, 即 $F\,|_{\mathcal{S}}\in\widehat{\mathcal{S}}$. □

4.5 Yoneda 函子 $Y:\mathcal{C}\to\widehat{\mathcal{S}}$ 何时保持可数直和

由引理 4.6, 考虑函子 $Y:\mathcal{C}\to\widehat{\mathcal{S}}$, $C\mapsto(-,C)\,|_{\mathcal{S}}$, 即它是函子 $\mathcal{C}\to\widehat{\mathcal{C}}$, $C\mapsto(-,C)$ 和限制函子 $\widehat{\mathcal{C}}\to\widehat{\mathcal{S}}$ 的复合.

现在的问题是, 何时 Yoneda 函子 $Y:\mathcal{C}\to\widehat{\mathcal{S}}$ 能保持可数直和? 换言之, 对 $\mathcal{C}$ 中可数多个对象 X_i, 何时典范态射 $\bigoplus_{i\in I}(-,X_i)\,|_{\mathcal{S}}\to(-,\bigoplus_{i\in I}X_i)\,|_{\mathcal{S}}$ 是自然同构? 比较命题 4.3(iv) 和推论 4.5(iv). 这个问题与 Brown 可表示定理紧密相关, 见 Neeman 的证明 (参见文献 [4, 定理 8.3.3]). Krause 在文献 [2, 引理 3] 中引入了如下条件.

(G2) 设 $X_i\to Y_i$ $(i\in I)$ 是 $\mathcal{C}$ 中态射, 其中 I 是可数集. 若对任意 $S\in\mathcal{S}_0$ 以及 $i\in I$, $(S,X_i)\to(S,Y_i)$ 是满射, 则对任意 $S\in\mathcal{S}_0$, 诱导同态 $(S,\bigoplus_{i\in I}X_i)\to(S,\bigoplus_{i\in I}Y_i)$ 是满射.

例 4.7 设 $\mathcal{C}$ 是有直和的加法范畴, $\mathcal{S}_0$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个紧对象集, 则 $\mathcal{S}_0$ 满足 (G2).

关键引理 4.8 (参见文献 [2, 引理 3]) 设 $\mathcal{C}$ 是有直和与弱核的加法范畴, $\mathcal{S}_0$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个对象集, $\mathcal{S}:=\mathrm{Add}\mathcal{S}_0$, 则 Yoneda 函子 $Y:\mathcal{C}\to\widehat{\mathcal{S}}$, $X\mapsto(-,X)\,|_{\mathcal{S}}$ 保持可数直和当且仅当 $\mathcal{S}_0$ 满足 (G2).

换言之, 对任意 $X_i\in\mathcal{C}$, $i\in I$ (I 是可数指标集), 典范态射 $\bigoplus_{i\in I}(-,X_i)\,|_{\mathcal{S}}\to(-,\bigoplus_{i\in I}X_i)\,|_{\mathcal{S}}$ 为自然同构当且仅当 $\mathcal{S}_0$ 满足 (G2).

证明 设 X_i $(i\in I)$ 是 $\mathcal{C}$ 中一族对象, 其中 I 是可数集. 由引理 4.6 可知, $(-,X_i)\,|_{\mathcal{S}}$ 和 $(-,\bigoplus_{i\in I}X_i)\,|_{\mathcal{S}}$ 是 $\widehat{\mathcal{S}}$ 中对象. 由推论 4.5(v) 有 $\bigoplus_{i\in I}((-,X_i)\,|_{\mathcal{S}})\in\widehat{\mathcal{S}}$. 对每个 $i\in I$, 取 X_i 的一个右 $\mathcal{S}$-逼近 $S_i\to X_i$, 则对任意 $i\in I$, $(-,S_i)\,|_{\mathcal{S}}\to(-,X_i)\,|_{\mathcal{S}}$ 是满态射, 进而 $\bigoplus_{i\in I}(-,S_i)\,|_{\mathcal{S}}\to\bigoplus_{i\in I}(-,X_i)\,|_{\mathcal{S}}$ 是满态射. 于是有 $\widehat{\mathcal{S}}$ 中交换图

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{i\in I}(-,S_i)\Big|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d, "="'] & \bigoplus\limits_{i\in I}(-,X_i)\Big|_{\mathcal{S}}, \arrow[d, "a"] \\
\Big(-,\bigoplus\limits_{i\in I}S_i\Big)\Big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "b"] & \Big(-,\bigoplus\limits_{i\in I}X_i\Big)\Big|_{\mathcal{S}},
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

其中上行的态射是满态射, 左边恒等态射由推论 4.5(iv) 给出, 右边态射 a 为典范单态射, (4.1) 的交换

性由下图看出:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in I}(-,S_i)\Big|_{\mathcal{S}} \arrow[rrr] \arrow[dd] & & & \bigoplus_{i\in I}(-,X_i)\Big|_{\mathcal{S}} \arrow[dd] \\
& (-,S_i)\,|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[ul] \arrow[dl] & (-,X_i)\,|_{\mathcal{S}} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\Big(-,\bigoplus_{i\in I}S_i\Big)\Big|_{\mathcal{S}} \arrow[rrr] & & & \Big(-,\bigoplus_{i\in I}X_i\Big)\Big|_{\mathcal{S}},
\end{tikzcd}$$

其中每个三角形和每个梯形都是交换的. 由交换图 (4.1) 知 a 是自然同构当且仅当 b 是满态射.

若 $\mathcal{S}_0$ 满足 (G2), 则 b 为满态射, 从而, a 为自然同构. 反之, 若 a 为自然同构, 则 $\mathcal{S}_0$ 满足 (G2). 事实上, 设对任意 $S\in\mathcal{S}_0$, $(S,X_i)\to(S,Y_i)$ 是满射, 即 $(-,X_i)\,|_{\mathcal{S}}\to(-,Y_i)\,|_{\mathcal{S}}$ 是满态射. 因直和保持满同态, 故 $\bigoplus_{i\in I}(-,X_i)\,|_{\mathcal{S}}\to\bigoplus_{i\in I}(-,Y_i)\,|_{\mathcal{S}}$ 是满态射. 但 a 对 X_i 和 Y_i 均为自然同构, 由交换图

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i\in I}(-,X_i)\Big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "a"] \arrow[d] & \Big(-,\bigoplus_{i\in I}X_i\Big)\Big|_{\mathcal{S}} \arrow[d] \\
\bigoplus_{i\in I}(-,Y_i)\Big|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "a"] & \Big(-,\bigoplus_{i\in I}Y_i\Big)\Big|_{\mathcal{S}},
\end{tikzcd}$$

知 $(-,\bigoplus_{i\in I}X_i)\,|_{\mathcal{S}}\to(-,\bigoplus_{i\in I}Y_i)\,|_{\mathcal{S}}$ 是满态射, 即 $\mathcal{S}_0$ 满足 (G2). □

5 Brown 可表示定理及其应用

5.1 Brown 可表示定理

定义 5.1 设 $\mathcal{T}$ 是有直和的三角范畴. 称 $\mathcal{T}$ 满足 Brown 可表示定理, 如果将 $\mathcal{T}$ 中直和变成直积的任意上同调反变函子 $F:\mathcal{T}\to\mathrm{Ab}$ 均是可表函子, 即存在 $X\in\mathcal{T}$ 使得 $F\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(-,X)$.

对 $\mathcal{T}$ 的一个对象集 $\mathcal{S}_0$, 考虑如下条件:

(G1) 设 Z 是 $\mathcal{T}$ 中对象. 若对任意 $S\in\mathcal{S}_0$, 有 $(S,Z)=0$, 则 $Z=0$ (注意, (S,Z) 是指 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(S,Z)$).

设 $\mathcal{T}$ 是有直和的三角范畴. 称 $\mathcal{T}$ 是完备生成的, 如果存在 $\mathcal{T}$ 的一个对象集 $\mathcal{S}_0$ 同时满足 (G1) 和 (G2). 此时, 我们也称 $\mathcal{T}$ 是由 $\mathcal{S}_0$ 完备生成的.

为方便起见, 将 $\mathcal{T}$ 的包含 $\mathcal{S}_0$ 且对直和封闭的最小三角子范畴记为 $\langle\mathcal{S}_0\rangle$, 即第 2.1 小节中的 $\langle\mathcal{S}_0\rangle$sum.

定理 5.2 (参见文献 [3, 定理 3.1]、[5, 定理 8.3.3] 和 [2, 定理 A]) 设 $\mathcal{T}$ 是由 $\mathcal{S}_0$ 完备生成的三角范畴, 则 $\mathcal{T}$ 满足 Brown 可表示定理且 $\mathcal{T}=\langle\mathcal{S}_0\rangle$.

注 5.3 该定理由 Krause 在文献 [2, 定理 A] 中给出: 原证省略太多; 下述证明是从 Neeman 在文献 [5, 定理 8.3.3] 中的证明并加以细化得到.

因为对直和封闭的三角子范畴总是厚子范畴 (参见文献 [13, 命题 3.6]), 故 $\langle S_0\rangle$ 是厚子范畴. 注意, 此处 $\langle\mathcal{S}_0\rangle$ 对直和封闭: 在有些文献中, $\langle S_0\rangle$ 表示 $\mathcal{T}$ 的包含 S_0 的最小三角子范畴, 并不要求对直和封闭.

5.2 定理 5.2 的证明

不失一般性可设 $\mathcal{S}_0$ 对 [1] 和 [−1] 封闭. 令 $\mathcal{S} := \mathrm{Add}\mathcal{S}_0$.

第 1 步 存在态射序列 $X_0 \xrightarrow{\phi_0} X_1 \xrightarrow{\phi_1} X_2 \xrightarrow{\phi_2} \cdots$, 其中 $X_i \in \langle \mathcal{S} \rangle = \langle \mathcal{S}_0 \rangle$, 使得

(1) 对任意 $i \geqslant 0$, 存在自然变换 $\pi_i : (-, X_i) \to F$, 使得 $\pi_i|_{\mathcal{S}} : (-, X_i)|_{\mathcal{S}} \to F|_{\mathcal{S}}$ 为满态射;

(2) $\pi_{i+1}(-, \phi_i) = \pi_i$.

下面归纳定义 X_i. 令 $U := \bigcup_{S \in \mathcal{S}_0} FS$. 对任意元素 $x \in U$, 令 $\mathcal{S}_{0,x} := \{S \in \mathcal{S}_0 \mid x \in FS\}$, 定义

$$X_0 := \bigoplus_{x \in U} \bigoplus_{S \in \mathcal{S}_{0,x}} S \in \mathcal{S}.$$

因为 F 将直和变成直积, 所以,

$$FX_0 := \prod_{x \in U} \prod_{S \in \mathcal{S}_{0,x}} FS \in \mathrm{Ab}.$$

由 Yoneda 引理 $\mathrm{Hom}((-, X_0), F) \cong F(X_0)$, 可定义与元素 $(x) \in FX_0 = \prod_{x \in U} \prod_{S \in \mathcal{S}_{0,x}} FS$ (即 (x) 的第 x 个分量为 x) 对应的自然变换 $\pi_0 : (-, X_0) \to F$. 由定义知, $\pi_0|_{\mathcal{S}} : (-, X_0)|_{\mathcal{S}} \to F|_{\mathcal{S}}$ 为满同态.

(事实上, 只需证明对每个 $S \in \mathcal{S}_0$, $\pi_{0,S} : (S, X_0) \to FS$ 是满射. 对任意 $x \in FS$, 显然有 $x \in U$, $S \in \mathcal{S}_{0,x}$, 且 S 为 X_0 的直和项. 设 $e_S : S \to X_0$ 为结构态射. 由如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
(X_0, X_0) \arrow[r, "{(e_S, X_0)}"] \arrow[d, "\pi_{0,X_0}"'] & (S, X_0) \arrow[d, "\pi_{0,S}"] \\
FX_0 \arrow[r, "Fe_S"] & FS
\end{tikzcd}$$

知 $\pi_{0,S}(e_S) = \pi_{0,S}(e_S, X_0)(\mathrm{Id}_{X_0}) = Fe_S \pi_{0,X_0}(\mathrm{Id}_{X_0}) = Fe_S((x)) = x$, 其中最后一个等式由如下交换图得到:

$$\begin{tikzcd}
FX_0 \arrow[r, "Fe_S"] \arrow[d, equal] & FS \\
\prod\limits_{x \in U} \prod\limits_{S \in \mathcal{S}_{0,x}} FS. \arrow[ur, "p_S"'] &
\end{tikzcd}$$

这就证明了 $\pi_{0,S}$ 是满的.)

假设已经构造了 $X_0, \ldots, X_i$. 在 Abel 范畴 $\mathrm{Func}(\mathcal{T}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ 中, 考虑正合列 $0 \to K_i \xrightarrow{\sigma_i} (-, X_i) \xrightarrow{\pi_i} F$, 即对每个 $X \in \mathcal{T}$, $K_i := \mathrm{Ker}\pi_i$ 且 $K_i X = \mathrm{Ker}\pi_{i,X}$.

令 $U_i := \bigcup_{S \in \mathcal{S}_0} K_i S$. 对于元素 $x \in U_i$, 由 Hom 集的不交性可知, 存在唯一的对象 $S \in \mathcal{S}_0$, 使得 $x \in \mathrm{Ker}\pi_{i,S}$, 即 $x : S \to X_i$ 满足 $\pi_{i,S}(x) = 0 \in FS$. 令

$$T_i := \bigoplus_{\substack{x \in U_i \\ x : S \to X_i \\ \pi_{i,S}(x) = 0}} S \in \mathcal{S}.$$

由 $(T_i, X_i) = \prod_{\substack{x \in U_i \\ x : S \to X_i \\ \pi_{i,S}(x) = 0}} (S, X_i)$ 可得 $v_i : T_i \to X_i$, 使得 $v_i = (x) \in \prod_{\substack{x \in U_i \\ x : S \to X_i \\ \pi_{i,S}(x) = 0}} (S, X_i)$.

设 $T_i \overset{v_i}{\to} X_i \overset{\phi_i}{\to} X_{i+1} \overset{\theta_i}{\to} T_i[1]$ 是好三角, 则 $X_{i+1} \in \langle \mathcal{S} \rangle = \langle \mathcal{S}_0 \rangle$. 由自然变换 $\pi_i : (-, X_i) \to F$ 可得如下 Abel 群的行正合交换图:

$$\begin{tikzcd}
(X_{i+1}, X_i) \arrow[r, "{(-,\phi_i)}"] \arrow[d, "\pi_{i,X_{i+1}}"] & (X_i, X_i) \arrow[r, "{(-,v_i)}"] \arrow[d, "\pi_{i,X_i}"] & (T_i, X_i) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi_{i,T_i}"] & \prod (S, X_i) \arrow[d, "\prod \pi_{i,S}"] \\
FX_{i+1} \arrow[r, "F\phi_i"] & FX_i \arrow[r, "Fv_i"] & FT_i \arrow[r, equal] & \prod FS,
\end{tikzcd}$$

其中下行的正合性由 F 是上同调函子可知. 由 $v_i : T_i \to X_i$ 的定义知,

$$Fv_i(\pi_{i,X_i}(\mathrm{Id}_{X_i})) = \prod_{\substack{x \in U_i \\ x: S \to X_i \\ \pi_{i,S}(x)=0}} (\pi_{i,S}(x)) = 0.$$

于是存在 $\pi'_{i+1} \in FX_{i+1}$ 使得 $F\phi_i(\pi'_{i+1}) = \pi_{i,X_i}(\mathrm{Id}_{X_i})$. 由 Yoneda 引理得到自然变换 $\pi_{i+1} : (-, X_{i+1}) \to F$ 使得 $\pi_{i+1,X_{i+1}}(\mathrm{Id}_{X_{i+1}}) = \pi'_{i+1}$, 且 $\pi_{i+1}(-, \phi_i) = \pi_i$. 又因 $\pi_i\,|_{\mathcal{S}}$ 是满态射, 故 $\pi_{i+1}\,|_{\mathcal{S}}$ 是满态射.

第 2 步 对每个 $i \geqslant 0$, 存在自然同构 $\mathrm{Ker}(-, \phi_i)\,|_{\mathcal{S}} \cong K_i\,|_{\mathcal{S}}$.

设 $0 \to \mathrm{Ker}(-, \phi_i) \overset{a_i}{\to} (-, X_i) \overset{(-,\phi_i)}{\to} (-, X_{i+1})$ 是 Abel 范畴 $\mathrm{Func}(\mathcal{T}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ 中正合列. 因 $\pi_i a_i = \pi_{i+1}(-, \phi_i) a_i = 0$ 且 $\sigma_i : K_i \to (-, X_i)$ 是 $\pi_i : (-, X_i) \to F$ 的核, 故存在唯一自然变换 $b_i : \mathrm{Ker}(-, \phi_i) \to K_i$ 使得 $a_i = \sigma_i b_i$. 因 a_i 是单态射, 故 b_i 是单态射. 故只需证明对任意 $S \in \mathcal{S}$, $b_{i,S} : \mathrm{Ker}(-, \phi_i)(S) \to K_i S = \mathrm{Ker}\pi_{i,S}$ 是满射. 这本质上是因为 $v_i : T_i \to X_i$ 的构造. 具体来说, 设 $x_S \in \mathrm{Ker}\pi_{i,S}$, 即 $x_S : S \to X_i$ 满足 $\pi_{i,S}(x_S) = 0 \in FS$. 设

$$e_S : S \to T_i = \bigoplus_{\substack{x \in U_i \\ x: S \to X_i \\ \pi_{i,S}(x)=0}} S'$$

是结构态射. 考虑正合列 $(S, T_i) \overset{(-,v_i)}{\to} (S, X_i) \overset{(-,\phi_i)}{\to} (S, X_{i+1})$. 由以下交换图知: $v_i e_S = x_S$.

$$\begin{tikzcd}
(X_i, X_i) \arrow[r, "{(v_i,X_i)}"] \arrow[drr, "{(x_{S'},X_i)}"'] & (T_i, X_i) \arrow[r, equal] & \left(\bigoplus_{x \in U_i} S', X_i \right) \arrow[d, "{p_{S'}=(e_{S'},X_i)}"] \\
 & & (S', X_i).
\end{tikzcd}$$

于是, $0 = (-, \phi_i)(-, v_i)(e_S) = (-, \phi_i)(v_i e_S) = (-, \phi_i)(x_S)$, 从而存在 $y \in \mathrm{Ker}(-, \phi_i)(S)$ 使得 $x_S = a_{i,s}(y) = \sigma_{i,S} b_{i,S}(y) = b_{i,S}(y)$ (注意, $\sigma_{i,S}$ 是嵌入). 这就证明了对每个 $S \in \mathcal{S}$, $b_{i,S} : \mathrm{Ker}(-, \phi_i)(S) \to K_i S = \mathrm{Ker}\pi_{i,S}$ 是满射. 于是, $\mathrm{Ker}(-, \phi_i)\,|_{\mathcal{S}} \cong K_i\,|_{\mathcal{S}}$.

第 3 步 对每个 $i \geqslant 1$, 存在自然同构 $(-, X_i)\,|_{\mathcal{S}} \cong F\,|_{\mathcal{S}} \oplus K_i\,|_{\mathcal{S}}$.

由第 2 步有行正合交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_i\,|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\sigma_i\,|_{\mathcal{S}}"] \arrow[d, "0"'] & (-, X_i)\,|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\pi_i\,|_{\mathcal{S}}"] \arrow[d, "{(-,\phi_i)\,|_{\mathcal{S}}}"'] & F\,|_{\mathcal{S}} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dashed, "\iota_i"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & K_{i+1}\,|_{\mathcal{S}} \arrow[r] & (-, X_{i+1})\,|_{\mathcal{S}} \arrow[r, "\pi_{i+1}\,|_{\mathcal{S}}"] & F\,|_{\mathcal{S}} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

于是 $(-, \phi_i)\,|_{\mathcal{S}}$ 可经过 $\sigma_i\,|_{\mathcal{S}}$ 的余核分解, 即 $(-, \phi_i)\,|_{\mathcal{S}} = \iota_i \pi_i\,|_{\mathcal{S}}$. 因此, $\pi_{i+1}\,|_{\mathcal{S}} \iota_i = \mathrm{Id}_{F\,|_{\mathcal{S}}}$.

第 4 步　考虑 Abel 范畴 $\widehat{\mathcal{S}}$ 中态射序列

$$(-,X_1)\,|_{\mathcal{S}} \overset{(-,\phi_1)\,|_{\mathcal{S}}}{\to} (-,X_2)\,|_{\mathcal{S}} \overset{(-,\phi_2)\,|_{\mathcal{S}}}{\to} (-,X_3)\,|_{\mathcal{S}} \overset{(-,\phi_3)\,|_{\mathcal{S}}}{\to} \cdots.$$

由第 3 步知上述序列恰为如下两个序列的直和:

$$F\,|_{\mathcal{S}} \overset{=}{\to} F\,|_{\mathcal{S}} \overset{=}{\to} F\,|_{\mathcal{S}} \overset{=}{\to} \cdots, \quad K_1\,|_{\mathcal{S}} \overset{0}{\to} K_2\,|_{\mathcal{S}} \overset{0}{\to} K_3\,|_{\mathcal{S}} \overset{0}{\to} \cdots.$$

由此得 $\widehat{\mathcal{S}}$ 中如下两个正合列:

$$0 \to \bigoplus_1^{\infty} F\Big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{1-\text{“shift”}} \bigoplus_1^{\infty} F\Big|_{\mathcal{S}} \to F\,|_{\mathcal{S}} \to 0, \quad 0 \to \bigoplus_1^{\infty} K_i\Big|_{\mathcal{S}} \overset{=}{\to} \bigoplus_1^{\infty} K_i\Big|_{\mathcal{S}} \to 0 \to 0.$$

因此有 $\widehat{\mathcal{S}}$ 中正合列

$$0 \to \bigoplus_1^{\infty}(-,X_i)\Big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{1-\text{“shift”}} \bigoplus_1^{\infty}(-,X_i)\Big|_{\mathcal{S}} \to F\,|_{\mathcal{S}} \to 0. \tag{5.1}$$

第 5 步　由 $\mathcal{T}$ 中序列 $X_1 \overset{\phi_1}{\to} X_2 \overset{\phi_2}{\to} X_3 \overset{\phi_3}{\to} \cdots$ 可得态射 $\bigoplus_1^{\infty} X_i \xrightarrow{1-\phi} \bigoplus_1^{\infty} X_i$, 其中 ϕ 为由 $\phi e_i = e_{i+1}\phi_i$ 定义的 “平移” 函子. 设

$$\bigoplus_1^{\infty} X_i \xrightarrow{1-\phi} \bigoplus_1^{\infty} X_i \overset{c}{\to} \underrightarrow{\mathrm{Hocolim}} X_i \to \left(\bigoplus_1^{\infty} X_i\right)[1]$$

是好三角. 令 $X := \underrightarrow{\mathrm{Hocolim}} X_i \in \langle \mathcal{S}_0 \rangle$ (称之为该序列的同伦余极限 [15]). 考虑正合列 $FX \overset{Fc}{\to} F(\bigoplus_1^{\infty} X_i) \xrightarrow{F(1-\phi)} F(\bigoplus_1^{\infty} X_i)$. 由 ϕ 的定义和 $\pi_{i+1} = \pi_i(-,\phi_i)$ 可知, $(\pi_{i,X_i}(\mathrm{Id}_{X_i})) \in \prod_1^{\infty} FX_i \cong F(\bigoplus_1^{\infty} X_i)$ 在 $F(1-\phi)$ 下的像为零. 因此, 对应的元素 $\pi' \in FX$ 满足 $F(c)(\pi') = (\pi_{i,X_i}(\mathrm{Id}_{X_i}))$. 由 Yoneda 引理, π' 就给出了自然变换 $\pi: (-,X) \to F$. 考虑 $\widehat{\mathcal{S}}$ 中正合列

$$\begin{aligned}\left(-,\bigoplus_1^{\infty} X_i\right)\Big|_{\mathcal{S}} &\overset{(-,1-\phi)}{\to} \left(-,\bigoplus_1^{\infty} X_i\right)\Big|_{\mathcal{S}} \to (-,X)\,|_{\mathcal{S}} \to \left(-,\left(\bigoplus_1^{\infty} X_i\right)[1]\right)\Big|_{\mathcal{S}} \\ &\overset{(-,1-\phi[1])}{\to} \left(-,\left(\bigoplus_1^{\infty} X_i\right)[1]\right)\Big|_{\mathcal{S}}.\end{aligned} \tag{5.2}$$

比较 (5.2) 和 (5.1), 由引理 4.8 有交换图

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_1^{\infty}((-,X_i)\,|_{\mathcal{S}}) \arrow[r, "1-\text{“shift”}"] & \bigoplus_1^{\infty}((-,X_i)\,|_{\mathcal{S}}) \arrow[r] & F\,|_{\mathcal{S}} \\
\left(-,\bigoplus_1^{\infty} X_i\right)\Big|_{\mathcal{S}} \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "(-,1-\phi)"] & \left(-,\bigoplus_1^{\infty} X_i\right)\Big|_{\mathcal{S}} \arrow[u, "\cong"] \arrow[r, "(-,c)"] & (-,X). \arrow[u, "\pi\,|_{\mathcal{S}}"']
\end{tikzcd}$$

由此可知 $(-,1-\phi)$ 是单态射. 因 $\mathcal{S}$ 对 $[1]$ 和 $[-1]$ 封闭, 故 $1-\phi[1]$ 也是单态射. 于是 (5.2) 即为

$$0 \to \left(-,\bigoplus_1^{\infty} X_i\right)\Big|_{\mathcal{S}} \xrightarrow{(-,1-\phi)} \left(-,\bigoplus_1^{\infty} X_i\right)\Big|_{\mathcal{S}} \to (-,X)\,|_{\mathcal{S}} \to 0. \tag{5.3}$$

比较 (5.3) 和 (5.1) 可看出 $\pi\,|_{\mathcal{S}}: (-,X)\,|_{\mathcal{S}} \cong F\,|_{\mathcal{S}}$.

第 6 步 断言 $\mathcal{T}=\langle\mathcal{S}_0\rangle$.

事实上, 对于 $Y\in\mathcal{T}$ 考虑 $F:=(-,Y)$. 由第 5 步知, 存在 $X\in\langle\mathcal{S}_0\rangle$ 使得

$$(-,X)\,|_{\mathcal{S}}\overset{(-,a)}{\cong}(-,Y)\,|_{\mathcal{S}}.$$

设 $X\overset{a}{\to}Y\to Z\to Y[1]$ 是好三角, 则 $(-,Z)\,|_{\mathcal{S}}=0$. 由 (G1) 知 $Z=0$. 于是, $Y\cong X\in\langle\mathcal{S}_0\rangle$.

第 7 步 最后回到对 F 的讨论. 至此有 $F|_{\mathcal{S}}\cong(-,X)\,|_{\mathcal{S}}$ 并且 $\mathcal{T}=\langle\mathcal{S}_0\rangle=\langle\mathcal{S}\rangle$. 容易看出 $F\cong(-,X)$. 这就完成了整个 Brown 可表示定理的证明. □

5.3 紧生成三角范畴

定义 5.4 (参见文献 [3, 定义 1.7]) 设 $\mathcal{T}$ 是有直和的三角范畴. $\mathcal{T}$ 称为紧生成的, 如果存在 $\mathcal{T}$ 的一个紧对象集 $\mathcal{S}_0$, 使得对任意 $S\in\mathcal{S}_0$, 若 $(S,Z)=0$, 则 $Z\cong 0$. 此时也称 $\mathcal{T}$ 是由 $\mathcal{S}_0$ 紧生成的.

由例 4.7 知, 紧生成三角范畴总是完备生成的. 再由定理 5.2 可得下面的推论.

推论 5.5 (参见文献 [3, 定理 3.1] 和 [5, 定理 8.3.3]) 设 $\mathcal{T}$ 是由 $\mathcal{S}_0$ 紧生成三角范畴, 则 $\mathcal{T}$ 满足 Brown 可表示定理且 $\mathcal{T}=\langle\mathcal{S}_0\rangle$.

从 Brown 可表示定理直接看出如下关于紧生成三角范畴的另一个等价定义.

推论 5.6 (参见文献 [5, 定理 8.3.3 和命题 8.4.1]) 设 $\mathcal{T}$ 是有直和的三角范畴, 则 $\mathcal{T}$ 是由 $\mathcal{S}_0$ 紧生成当且仅当 $\mathcal{T}=\langle\mathcal{S}_0\rangle$ 且 $\mathcal{S}_0$ 是 $\mathcal{T}$ 的一个紧对象集.

证明 必要性由推论 5.5 即得. 下面证充分性. 由 $\mathcal{T}=\langle\mathcal{S}_0\rangle$, 应用上同调函子容易验证 $\mathcal{T}$ 由 $\mathcal{S}_0$ 紧生成. □

5.4 右伴随函子存在的一个充分条件

有右伴随的函子保持直和 (引理 2.4). 由 Brown 可表示定理直接看到, 该命题的逆对于从紧生成三角范畴间出发的三角函子也是成立的. 这就提供了三角函子的右伴随存在性的一个充分条件. 这是 Brown 可表示定理的一个重要应用.

定理 5.7 (参见文献 [5, 定理 8.4.4]) 设 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是三角范畴间的三角函子, 且 $\mathcal{C}$ 是完备生成的 (或紧生成的), 则 F 有右伴随当且仅当 F 保持直和.

证明 必要性见引理 2.4. 下证充分性. 设 F 保持直和. 对任意 $Y\in\mathcal{D}$, 设 $H:=\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-),Y):\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathrm{Ab}$. 因 F 是三角函子, 故 H 是上同调函子. 因 F 保持直和, 故 H 将 $\mathcal{C}$ 中直和变为 Ab 中直积. 由定理 5.2 知, 存在唯一对象 $\overline{Y}\in\mathcal{C}$ 使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-),Y)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\overline{Y})$. 不难看出, $Y\to\overline{Y}$ 定义了一个函子 $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$. 由 G 的定义即知 (F,G) 是伴随对. □

5.5 右伴随何时是左伴随

保持直和的右伴随函子的左伴随总是保持紧对象的 (引理 2.5). 该命题的逆对紧生成三角范畴之间的三角函子也成立. 这提供了右伴随函子也是左伴随的充要条件.

定理 5.8 (参见文献 [3, 定理 4.1 和 5.1]) 设 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 和 $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 是紧生成三角范畴之间的三角函子且 (F,G) 是伴随对, 则下述等价: (i) G 有右伴随; (ii) F 保持紧对象; (iii) G 保持直和.

证明 因为 $\mathcal{D}$ 是紧生成的, 故 (i) $\Leftrightarrow$ (iii) 由定理 5.7 保证. (iii) $\Rightarrow$ (ii) 即引理 2.5.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 假设 (2.1) 中 s 是同构. 从引理 2.5 的证明过程中可知, (2.1) 中最外围的方块可交换. 于是, 对 $\mathcal{C}$ 中任意紧对象 X, a_* 为同构.

设 $\bigoplus_{i\in I} GY_i \xrightarrow{a} G\bigoplus_{i\in I} Y_i \to Z \to (\bigoplus_{i\in I} GY_i)[1]$ 是好三角, 则对任意紧对象 $X\in\mathcal{C}$,

$$a_*:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\bigg(X,\bigoplus_{i\in I} GY_i\bigg)\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\bigg(X,G\bigg(\bigoplus_{i\in I} Y_i\bigg)\bigg)$$

是同构. 从而, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)=0$. 由紧生成三角范畴的定义即知 $Z=0$. 于是, 典范态射 $a:\bigoplus_{i\in I} GY_i \to G(\bigoplus_{i\in I} Y_i)$ 是同构, 即 G 保持直和. □

引理 5.9 (参见文献 [16, 引理 2.6(a)])　设 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是三角范畴之间的三角函子且 F 有右伴随 G. 若 $\mathcal{C}$ 是紧生成的, F 保持紧对象且限制函子 $F|_{\mathcal{C}^c}:\mathcal{C}^c\to\mathcal{D}^c$ 有右伴随 G_0, 则 G 保持紧对象且 $G|_{\mathcal{D}^c}\cong G_0$.

证明　设 $Y\in\mathcal{D}^c$. 只需证明 $GY\cong G_0Y$. 由 Yoneda 引理可知, 只需证明对每个 $X\in\mathcal{C}$, 有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GY)\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G_0Y)$. 又因为 $\mathcal{C}$ 是紧生成的, 故只需证明对每个 $X\in\mathcal{C}^c$, 有

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GY)\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G_0Y).$$

事实上, 由假设知 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,GY)\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,Y)\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G_0Y)$. □

6　Brown 可表示定理的对偶

Brown 可表示定理的对偶首次出现在文献 [4, 定理 2.1] 中, 然后被推广为文献 [5, 定理 8.6.1]. 下述工作源于文献 [2, 定理 B]: 它是文献 [5, 定理 8.6.1] 的推广, 且只需更简单的条件 (G3).

6.1　对称生成的三角范畴

定义 6.1 (参见文献 [2, 定义 2])　三角范畴 $\mathcal{T}$ 称为对称生成的, 如果存在 $\mathcal{T}$ 的两个对象集 $(\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0)$, 使得 $\mathcal{S}_0$ 满足 (G1), 且 $(\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0)$ 满足 (G3):

(G3) 对 $\mathcal{T}$ 中任意态射 $X\to Y$ 和 $\mathcal{S}_0$ 中任意对象 S, 诱导同态 $(S,X)\to(S,Y)$ 是满射当且仅当对任意 $U\in\mathcal{U}_0$, 其诱导同态 $(Y,U)\to(X,U)$ 是单射.

此时也称 $\mathcal{T}$ 是由 $(\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0)$ 对称生成的.

引理 6.2　三角范畴 $\mathcal{T}$ 是由 $(\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0)$ 对称生成的当且仅当 $\mathcal{U}_0$ 满足 (G1′) 且 $(\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0)$ 满足 (G3′):

(G1′) 设 $Z\in\mathcal{T}$. 若对任意 $U\in\mathcal{U}_0$, 有 $(Z,U)=0$, 则 $Z=0$.

(G3′) 设 $X\to Y$ 是 $\mathcal{T}$ 中态射, 则对任意 $S\in\mathcal{S}_0$, 诱导同态 $(S,X)\to(S,Y)$ 是单射当且仅当对任意 $U\in\mathcal{U}_0$, 诱导同态 $(Y,U)\to(X,U)$ 是满射.

证明　设 $\mathcal{T}$ 由 $(\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0)$ 对称生成. 设对任意 $U\in\mathcal{U}_0$, 有 $(Z,U)=0$. 考虑态射 $0\to Z$, 则对任意 $U\in\mathcal{U}_0$, 诱导同态 $(Z,U)\to(0,U)$ 为单射. 由 (G3) 知, 对任意 $S\in\mathcal{S}_0$, $(S,0)\to(S,Z)$ 是满同态, 即 $(S,Z)=0$. 故由 (G1) 知 $Z=0$, 即 (G1′) 成立. 下证 (G3′). 设对于态射 $X\to Y$, 对任意 $S\in\mathcal{S}_0$, 诱导同态 $(S,X)\to(S,Y)$ 均是单射. 考虑好三角 $X\to Y\to Z\to X[1]$. 由正合列 $(S,Y[-1])\to(S,Z[-1])\to(S,X)\to(S,Y)$ 知 $(S,Y[-1])\to(S,Z[-1])$ 均为满射. 由 (G3) 知, 对任意 $U\in\mathcal{U}_0$, 有 $(Z[-1],U)\to(Y[-1],U)$ 均为单射. 再由正合列 $(Y,U)\to(X,U)\to(Z[-1],U)\to(Y[-1],U)$ 可见 $(Y,U)\to(X,U)$ 均为满射. 另一方向类似可证. 这就证明了 (G3′).

反之, 若 $\mathcal{U}_0$ 满足 (G1′) 且 $(\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0)$ 满足 (G3′), 则类似可证 $\mathcal{T}$ 可由 $(\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0)$ 对称生成. □

推论 6.3 [2]　设 $\mathcal{T}$ 是三角范畴, 则 $\mathcal{T}$ 由 $(\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0)$ 对称生成当且仅当 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 由 $(\mathcal{U}_0,\mathcal{S}_0)$ 对称生成.

证明 注意到 $(\mathcal{T}^{\mathrm{op}},[-1])$ 也是三角范畴. 因为 $\mathcal{S}_0$ 在 $\mathcal{T}$ 中满足 (G1) 且 $(\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0)$ 在 $\mathcal{T}$ 中满足 (G3), 等价于 $\mathcal{S}_0$ 在 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 中满足 (G1′) 且 $(\mathcal{U}_0,\mathcal{S}_0)$ 在 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 中满足 (G3′), 所以, 由引理 6.2 即得要证的结论. □

6.2 紧生成、对称生成与完备生成

命题 6.4 [2] 设 $\mathcal{T}$ 是有直和的三角范畴, 则

(i) 若 $\mathcal{T}$ 是紧生成的, 则 $\mathcal{T}$ 是对称生成.

(ii) 若 $\mathcal{T}$ 是由 $(\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0)$ 对称生成的, 则 $\mathcal{T}$ 是由 $\mathcal{S}_0$ 完备生成的.

证明 (i) 设 $\mathcal{T}$ 由一个紧对象集 $\mathcal{S}_0$ 紧生成. 对任意对象 $S\in\mathcal{S}_0$, 考虑函子

$$F:=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(S,-),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}):\mathcal{T}^{\mathrm{op}}\to\mathrm{Ab}.$$

显然, F 是上同调函子且将 $\mathcal{T}$ 中直和变成直积. 由推论 5.5 可知, 存在唯一对象 $U_S\in\mathcal{T}$ 使得 $F\cong(-,U_S)$. 令 $\mathcal{U}_0:=\{U_S\mid S\in\mathcal{S}_0\}$. 因为 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是 Ab 的内射生成子, 所以, $\mathcal{T}$ 是由 $(\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0)$ 对称生成的.

(ii) 设 $\mathcal{T}$ 是由 $(\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0)$ 对称生成的. 设 $X_i\to Y_i$ $(i\in I)$ 是 $\mathcal{C}$ 中可数多个态射集, 其中 I 是可数集. 若对任意 $S\in\mathcal{S}_0$ 以及 $i\in I$, $(S,X_i)\to(S,Y_i)$ 是满射, 则由 (G3) 知, 对任意 $U\in\mathcal{U}_0$, $i\in I$, $(Y_i,U)\to(X_i,U)$ 均为单射. 因为直积保单态射, 故对任意 $U\in\mathcal{U}_0$, $\prod_{i\in I}(Y_i,U)\to\prod_{i\in I}(X_i,U)$ 是单射, 即 $(\bigoplus_{i\in I}Y_i,U)\to(\bigoplus_{i\in I}X_i,U)$ 是单射. 再由 (G3) 可知, 对任意 $S\in\mathcal{S}_0$, $(S,\bigoplus_{i\in I}X_i)\to(S,\bigoplus_{i\in I}Y_i)$ 是满射, 即 $\mathcal{S}_0$ 满足 (G2). □

6.3 Brown 可表示定理的对偶

定义 6.5 有直和的三角范畴 $\mathcal{T}$ 称为满足 Brown 可表示定理的对偶, 如果将 $\mathcal{T}$ 中直积变成直积的任意上同调函子 $F:\mathcal{T}\to\mathrm{Ab}$ 均是可表函子, 即存在 $X\in\mathcal{T}$ 使得 $F\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(X,-)$.

定理 6.6 (参见文献 [2, 定理 B]) 设 $\mathcal{T}$ 是由 $(\mathcal{S}_0,\mathcal{U}_0)$ 对称生成的有直和的三角范畴, 则 $\mathcal{T}$ 有直积, 满足 Brown 可表示定理的对偶且 $\mathcal{T}=\langle\mathcal{S}_0\rangle=[\![\mathcal{U}_0]\!]$, 其中 $[\![\mathcal{U}_0]\!]$ 表示 $\mathcal{T}$ 的包含 $\mathcal{U}_0$ 且对直积封闭的最小三角子范畴.

证明 首先证明 $\mathcal{T}$ 有直积, 从而 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 有直和. 由命题 6.4 知, $\mathcal{T}$ 是由 $\mathcal{S}_0$ 完备生成的, 故 $\mathcal{T}$ 满足 Brown 可表示定理且 $\mathcal{T}=\langle\mathcal{S}_0\rangle$ (参见定理 5.2). 因此, 对任意对象集 $\{X_i\mid i\in I\}$, 函子 $\prod_{i\in I}(-,X_i)$: $X\mapsto\prod_{i\in I}(X,X_i)$ 为可表函子, 不妨设为 $(-,X)$. 由直积的定义即知 X 就是直积 $\prod_{i\in I}X_i$.

由推论 6.3 知, $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 是由 $(\mathcal{U}_0,\mathcal{S}_0)$ 对称生成的, 故由命题 6.4 知 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 由 $\mathcal{U}_0$ 完备生成. 再由定理 5.2 知, $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 满足 Brown 可表示定理且 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}=\langle\mathcal{U}_0\rangle$, 于是, $\mathcal{T}=[\![\mathcal{U}_0]\!]$.

显然, 函子 $F:\mathcal{T}\to\mathrm{Ab}$ 自然地视为从 $(\mathcal{T}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ 到 Ab 的函子. 因为 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 满足 Brown 可表示定理, 所以存在 $X\in\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$, 使得

$$F\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}^{\mathrm{op}}}(-,X)=(X,-),$$

即 $\mathcal{T}$ 满足 Brown 可表示定理的对偶. □

由命题 6.4 和定理 6.6 即得下述重要结论.

推论 6.7 设 $\mathcal{T}$ 是由 $\mathcal{S}_0$ 紧生成的三角范畴, 则 $\mathcal{T}$ 有直积且满足 Brown 可表示定理的对偶.

注 6.8 由此可见, Krause 引入对称生成三角范畴是重要创新, 因为无法对 $\mathcal{T}^{\mathrm{op}}$ 应用推论 5.5 直接得到推论 6.7. 注意到紧对象的对偶也非实用的概念: 即使在模范畴中其存在性也有问题.

受篇幅所限, 本文避免涉及与无限集的基数相关的概念, 如 α- 完备生成三角范畴 (参见文献 [5]). 顺便提及, 优生成 (well generated) 三角范畴是完备生成的 (参见文献 [17, 第 121 页的定理 A]).

6.4 左伴随存在的条件

有左伴随的函子保持直积 (引理 2.4). 下述定理指出该命题的逆对从紧生成三角范畴出发的三角函子也成立. 这提供了三角函子存在左伴随的充分条件: 它是对偶 Brown 可表示定理的重要应用.

定理 6.9 设 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是三角范畴之间的三角函子, 且 $\mathcal{C}$ 是对称生成的 (或紧生成的), 则 F 有左伴随当且仅当 F 保持直积.

证明 必要性参见引理 2.4. 下证充分性. 设 F 保持直积. 对每个对象 $Y\in\mathcal{D}$, 考虑 $H:=\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,F-):\mathcal{C}\to\mathrm{Ab}$, 则 H 是将直积变为直积的上同调函子. 由定理 6.6 可知, 存在唯一对象 $\overline{Y}\in\mathcal{C}$ 使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,F-)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\overline{Y},-)$. 不难看出 $Y\to\overline{Y}$ 定义了函子 $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 且 (G,F) 是伴随对. □

引理 6.10 (参见文献 [16, 引理 2.6(b)]) 设 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 为紧生成三角范畴之间的三角函子, 且有右伴随 G. 若 F 保持紧对象, 且限制函子 $F|_{\mathcal{C}^c}:\mathcal{C}^c\to\mathcal{D}^c$ 有左伴随, 则 F 保持直积, 从而 F 有左伴随.

证明 记 $H:\mathcal{D}^c\to\mathcal{C}^c$ 为 $F|_{\mathcal{C}^c}:\mathcal{C}^c\to\mathcal{D}^c$ 的左伴随, $\eta:\mathrm{Id}_{\mathcal{D}^c}\to F|_{\mathcal{C}^c}H$ 为伴随对 $(H,F|_{\mathcal{C}^c})$ 的单位. 对任意 $Y\in\mathcal{D}^c$, $X\in\mathcal{C}$, 考虑复合映射

$$\alpha_{Y,X}:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(HY,X)\xrightarrow{F}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FHY,FX)\xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\eta_Y,FX)}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,FX).$$

这就给出自然变换 $\alpha_Y:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(HY,-)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,F-)$, 且当 $X\in\mathcal{C}^c$ 时, $\alpha_{Y,X}$ 是同构: 因为此时 $\alpha_{Y,X}=\eta_{Y,X}$, 其中 $\eta_{Y,X}$ 为 $(H,F|_{\mathcal{C}^c})$ 的伴随同构.

函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(HY,-)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,F-)$ 都是保持直和的上同调函子, 且这两个函子在 $\mathcal{C}^c$ 上的限制自然同构. 因 $\mathcal{C}$ 紧生成, 故 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(HY,-)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,F-)$. 对任意 $X_i\in\mathcal{C}$ $(i\in I)$ 和 $Y\in\mathcal{D}^c$, 有同构

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\Big(Y,F\prod_{i\in I}X_i\Big)&\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\Big(HY,\prod_{i\in I}X_i\Big)\cong\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(HY,X_i)\\&\cong\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y,FX_i)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\Big(Y,\prod_{i\in I}FX_i\Big).\end{aligned}$$

这一同构恰由典范态射 $F\prod_{i\in I}X_i\to\prod_{i\in I}FX_i$ 所诱导. 因为 $\mathcal{D}$ 是紧生成的, 容易看出上述同构对于任意 $Y\in\mathcal{D}$ 均成立. 由 Yoneda 引理即得 $F\prod_{i\in I}X_i\cong\prod_{i\in I}FX_i$. □

6.5 伴随对的三分法

定理 6.11 [6] 设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是紧生成的三角范畴, 且 $\mathcal{C}^c$ 和 $\mathcal{D}^c$ 都有 Serre 函子. 设 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 是有右伴随 G 的三角函子, 则下列三种情形必居其一:

(i) F 没有左伴随, 且 G 没有右伴随;

(ii) F 有左伴随, 或 G 有右伴随;

(iii) 存在无限伴随序列 $(\dots,F_{-2},F_{-1},F,G,G_1,G_2,\dots)$.

证明 只需证明: 若存在伴随序列 (F_{-1},F,G,G_1), 则其一定可以延拓成无限伴随序列

$$(\dots,F_{-2},F_{-1},F,G,G_1,G_2,\dots).$$

由定理 5.8 知, F_{-1} 和 F 保持紧对象. 由引理 2.8, 我们得到在 $\mathcal{C}^c$ 与 $\mathcal{D}^c$ 间的无限伴随序列

$$(\dots,F'_{-2},F_{-1},F,G',G'_1,G'_2,\dots).$$

对 (F_{-1}, F) 运用引理 6.10 知, F_{-1} 有左伴随 F_{-2}. 因为 F_{-2} 保持紧对象, 所以, 函子 F_{-2} 在紧对象上的限制恰为 F'_{-2}. 重复这样的讨论, 便可得到无限伴随序列 $(\ldots, F_{-2}, F_{-1}, F)$.

对 (F, G) 运用引理 5.9 知 G 保持紧对象, 且 G 在紧对象上的限制恰为 G'. 于是, 由定理 5.8 可知, G_1 有右伴随 G_2. 重复这样的讨论, 便可得到无限伴随序列 $(F, G, G_1, G_2, \ldots)$. $\square$

致谢 感谢审稿人仔细阅读本文并提出宝贵建议.

参考文献

1 Auslander M. Coherent functors. In: Proceedings of the Conference on Categorical Algebra. Berlin: Springer, 1966, 189–231 [Also in: Selected Works of Maurice Auslander (Edited and with a Foreword by Reiten I, Smalø S O, Solberg Ø), Part 1 (II). Providence: Amer Math Soc, 1999, 283–325]

2 Krause H. A Brown representability theorem via coherent functors. Topology, 2002, 41: 853–861

3 Neeman A. The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability. J Amer Math Soc, 1996, 9: 205–236

4 Neeman A. Brown representability for the dual. Invent Math, 1998, 133: 97–105

5 Neeman A. Triangulated Categories. Annals of Mathematics Studies, vol. 148. Princeton: Princeton University Press, 2001

6 Zhang P, Zhang Y H, Zhou G D, et al. Unbounded ladders induced by Gorenstein algebras. Colloq Math, 2018, 151: 37–56

7 Bondal A I, Kapranov M M. Representable functors, Serre functors, and mutations. Math USSR Izv, 1990, 35: 519–541

8 Reiten I, Van den Bergh M. Noether hereditary abelian categories satisfying Serre functor. J Amer Math Soc, 2002, 15: 295–366

9 Neeman A. The connection between the K-theory localization theorem of Thomason, Trobaugh and Yao and the smashing subcategories of Bousfield and Ravenel. Ann Sci École Norm Sup, 1992, 25: 547–566

10 Hilton P J, Stammbach U. A Course in Homological Algebra. Graduate Texts in Mathematics, vol. 4. Berlin: Springer-Verlag, 1971

11 Bernhard K. Derived categories and universal problems. Commun Algebra, 1991, 19: 699–747

12 Keller B. Deriving DG categories. Ann Sci École Norm Sup (4), 1994, 27: 63–102

13 章璞. 三角范畴与导出范畴. 北京: 科学出版社, 2015

14 Happel D. On Gorenstein algebras. In: Progress in Mathematics, vol. 95. Basel: Birkhäuser, 1991, 389–404

15 Bökstedt M, Neeman A. Homotopy limits in triangulated categories. Compos Math, 1993, 86: 209–234

16 Balmer P, Dell'Ambrogio I, Sanders B. Grothendieck-Neeman duality and the Wirthmüller isomorphism. Compos Math, 2016, 152: 1740–1776

17 Krause H. On Neeman's well generated triangulated categories. Doc Math, 2001, 6: 121–126

Brown representability theorems with applications

Yanhong Bao, Yu Ye, Pu Zhang & Yuehui Zhang

Abstract The main aim of this survey is to provide an easy and comprehensive version of the Brown representability theorem and its dual; and to give a trichotomy of adjoint pairs between compactly generated triangulated categories, whose subcategories of compact objects have Serre functors.

Keywords adjoint pair, compact object, coherent functor, representable functor, compactly (symmetrically, perfectly) generated triangulated category, Brown representability theorem and its dual

MSC(2010) 18E30, 16E35, 18A25, 18A40, 18A22, 16G10

doi: 10.1360/N012017-00181